



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO VALLE DE CHALCO



SIMULACIÓN DE LOS TIEMPOS DE EJECUCIÓN DEL ALGORITMO DE GROVER DENTRO DEL ENFOQUE DE ONDA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A

Ing. José Benito Elizalde Salas

TUTOR ACADÉMICO

Dr. Manuel Ávila Aoki

TUTOR ADJUNTO

Dr. William de la Cruz de los Santos

TUTORA ADJUNTA

Dra. Cristina Juárez Landín



VALLE DE CHALCO SOLIDARIDAD, MÉXICO FEBRERO 2017.

Dedicatoria

Agradecimientos

Resumen

Abstract

Índice de contenido

| | |
|-----------------------------------|-----------|
| Introducción | 5 |
| Marco teórico | 8 |
| Oscilador armónico | 8 |
| Lagrangiano | 14 |
| Computación Cuántica | 15 |
| Referencias bibliográficas | 22 |

Índice de figuras

| | | |
|----|--|---|
| 1. | Esquema general de un oscilador armónico simple. | 9 |
|----|--|---|

Introducción

La Computación Cuántica es una rama de las Ciencias de la Computación, la cuál esta en una etapa de intensa investigación. En la actualidad han sido propuestos varios algoritmos de naturaleza cuántica, los cuales garantizan realizar operaciones muy rápidas. Uno de estos algoritmos, es el algoritmo de Grover, un algoritmo cuántico de búsqueda útil en grandes cantidades de datos sin ningún tipo de ordenamiento.

El algoritmo de Grover es capaz de realizar búsquedas con una velocidad mayor que algún algoritmo clásico. La razón entre velocidades demuestra que la velocidad del algoritmo de Grover es aproximadamente el cuadrado de la velocidad del mejor algoritmo clásico de búsqueda en una base de datos de gran cantidad de elementos sin ordenar.

Lo que se plantea en esta tesis es recoger el conocimiento y fundamento físico-matemático del algoritmo de Grover, a fin de poder simular su implementación en un entorno clásico.

La motivación de realizar esta investigación es la nueva perspectiva

que trae la Teoría Cuántica a la Computación. Dentro de la Teoría Cuántica existen dos conceptos relevantes; la Superposición y el Entrelazamiento, siendo este último la característica principal de dicha teoría [Schrödinger, 1935]. Es un recurso físico, como la energía que se puede medir, transformar, y depurar [Bub, 2015]. Ha sido ampliamente utilizado en la computación con contextos cuánticos, como en los diversos algoritmos, uno de ellos el algoritmo de búsqueda.

La existencia de estados entrelazados dentro de la Teoría Cuántica es una de las características primordial [Arvind, 2001]. Estos estados tienen la propiedad de mostrar efectos no clásicos, y juega un papel crucial en la computación cuántica.

La computación cuántica se presume que es más eficiente que su contraparte clásica [Jozsa y Linden, 2003]. Una justificación de ello comienza por la observación pionera de Feynman, de la simulación de un proceso cuántico en general, en un ordenador clásico parece requerir una sobrecarga exponencial de recursos computacionales en comparación con los recursos físicos necesarios para una implementación directa del proceso cuántico en sí. Algunos trabajos mostraron cómo un proceso cuántico puede ser aprovechado para llevar a cabo algoritmos computacionales más rápidamente, tal como, el algoritmo de factorización de Shor y el algoritmo de búsqueda de Grover. Este último, aunque propuesto en el contexto de la Computación Cuántica, puede ser implementado utilizando cualquier sistema que permita la superposición

de estado [Patel, 2006]. Por cierto, Patel (2006) en su enfoque del algoritmo de búsqueda cuántico, no considera una propiedad que es crucial para el algoritmo de Grover como lo es el Entrelazamiento, es por ello que el presente trabajo se pretende de alguna manera incluir entrelazamiento al enfoque de Patel, partiendo de la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué manera se debe incluir Entrelazamiento en el enfoque de Patel? Puesto, esta propiedad cuántica no tiene una contraparte clásica.

A partir de la pregunta de investigación se generaron los siguientes objetivos; como general, incorporar entrelazamiento al enfoque de Patel, y específicos:

1. Establecer mecanismos cuantitativos y cualitativos que incorporen entrelazamiento.
2. Identificar un parámetro que esté relacionado al entrelazamiento.
3. Hallar expresiones matemáticas para los tiempos de ejecución considerando entrelazamiento.

Por último, esta investigación busca fomentar el deseo de investigación en la rama de la Computación Cuántica, demostrando que existe un campo amplio para la aplicación de algoritmos cuánticos en la resolución eficientes de problemas.

Marco teórico

En este apartado, las dos primeras secciones presentan conceptos fundamentales que están relacionados al enfoque de Patel, que ayudan a comprender el análisis de la simulación. La sección siguiente da una noción de lo que es la Computación Cuántica, y la última sección se explica brevemente el algoritmo de Grover.

Oscilador armónico

Un oscilador armónico se define como un sistema mecánico, eléctrico, neumático, etc. [Alonso, 2009], en el cual, si se deja fuera de su posición de equilibrio, vuelve hacia él describiendo oscilaciones sinusoidales. Así, un oscilador armónico simple, es un importante sistema que está presente en muchas áreas de la física clásica. Este oscilador es una masa conectada a algún objeto elástico de masa despreciable que se fija en el otro extremo y limitado de manera que sólo se pueda mover en una dimensión. Este modelo

se aproxima a muchos sistemas que oscilan y su movimiento se puede describir utilizando las funciones seno y coseno. La siguiente figura muestra el esquema general de lo que es un oscilador armónico simple:

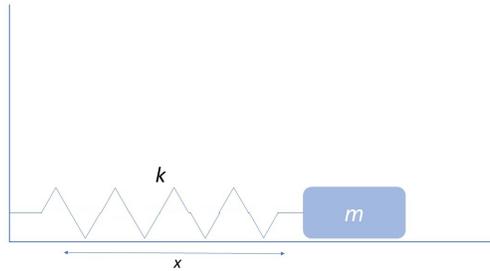


Figura 1: Esquema general de un oscilador armónico simple.

Una característica principal de un oscilador armónico, es que está sometido a una fuerza, que tiende a devolverlo al punto de equilibrio original, con una intensidad proporcional a la reparación respecto de dicho punto, dicho de otro modo, un oscilador armónico se caracteriza por una fuerza que es proporcional al desplazamiento, respecto a la posición de equilibrio [Morin, 2008]. Para darnos una idea, tomaremos el caso de la figura 1, de un sistema oscilatorio de una dimensión, donde k es una constante y el punto de equilibrio se describe por $x = 0$;

$$F(x) = -kx. \quad (1)$$

La fuerza de recuperación del sistema oscilatorio se conserva

[Marion, 1996], por lo que tiene asociado una energía potencial;

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (2)$$

La fuerza y la energía potencial están relacionadas mediante $F(x) = -dE_p/dx$ como se indica en (1). La fuerza que opera sobre la partícula es directamente proporcional al desplazamiento pero sigue una dirección opuesta. La ecuación (2) indica que la energía potencial varía como el cuadrado del desplazamiento. Por tanto, un un cuerpo de masa m sujeta a un resorte ideal de fuerza constante k , y moverse horizontalmente, es un ejemplo de un oscilador armónico.

De un oscilador armónico simple se pueden derivar reglas para el movimiento de un sistema de este tipo. Por ejemplo, de la ecuación (1), se puede sustituir a la fuerza en términos de aceleración, utilizando la segunda ley de Newton;

$$ma = -kx. \quad (3)$$

En la ecuación (3) se tiene una relación entre la posición y la aceleración. Se puede reorganizar en términos de los derivados para permitir completamente el movimiento de este tipo de oscilador. Entoces (3) se

reescribe como:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (4)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (5)$$

donde la constante de fuerza k es una medida de rigidez del resorte, que actúa sobre un objeto de masa m . Esta nueva ecuación incluye una relación entre una función de tiempo $x(t)$ y su segunda derivada por lo que (5) se puede escribir como:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \left(\frac{k}{m} \right) x. \quad (6)$$

De acuerdo a Rashid (2006), la ecuación (6) requiere que $x(t)$ sea una función cuya segunda derivada sea negativa de la función, con un factor constante k/m . Se tiene la propiedad de las funciones seno y coseno de su derivada;

$$\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \operatorname{sen} \omega t$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \omega t = \frac{d}{dt} (-\omega \operatorname{sen} \omega t) = -\omega^2 \operatorname{sen} \omega t.$$

la segunda derivada de un coseno o seno es la función original multiplicada

con un factor $-\omega^2$, por ello, no afecta si multiplicamos la función coseno por cualquier constante, por lo que denotaremos a una constante x_m , siendo el valor máximo de x . Entonces (6) se reescribe como:

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (7)$$

donde $x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos \phi \cos \omega t - x_m \sin \phi \sin \omega t = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, $A = x_m \cos \phi$ y $B = -x_m \sin \phi$, la constante ϕ admite cualquier combinación de soluciones seno y coseno, mientras las constantes x_m y ω son desconocidas, que describen una solución mas general a la ecuación (6). Para encontrar estas constantes tales que (7) sea una solución de (6), se diferencian dos veces la ecuación (7) respecto al tiempo;

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \implies \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$

retomando la ecuación (6) se obtiene;

$$\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m} x_m \cos(\omega t + \phi)$$

si elegimos la constante ω como:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (8)$$

la ecuación (7) es una solución de la ecuación de movimiento de un oscilador

armónico simple. Mientras las constantes x_m y ϕ siguen indeterminadas, por tanto, son arbitrarias. La constante ω es importante, puesto si aumentamos el tiempo t la ecuación (7) en términos de $2\pi/\omega$, se convierte en;

$$x = x_m \cos(\omega(t + \phi)), \quad (9)$$

pero $2\pi/\omega$ es el periodo del movimiento T y $\omega^2 = k/m$ se tiene:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (10)$$

así, todos los movimientos de la ecuación (6) tienen el mismo periodo de oscilación, la cual se determina sólo para la masa m de la partícula oscilatoria y por la constante k del resorte. La frecuencia f del oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo y está dada por:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (11)$$

por tanto,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (12)$$

Lagrangiano

Veamos ahora una nueva forma de ver el esquema de la figura 1, como se vio en la sección anterior, el esquema se puede analizar usando $F = ma$ para escribir la ecuación (3). La solución a esta ecuación son funciones sinusoidales, como bien se analizó. Sin embargo, se puede resolver usando otro método que no utiliza explícitamente $F = ma$. En muchas situaciones físicas, este nuevo procedimiento es muy adecuado que el uso de $F = ma$. Veamos este proceso, se considera la siguiente combinación de energía cinética y potencial;

$$\mathcal{L} = E_c - E_p, \quad (13)$$

a esto se le llama Lagrangiano, a la diferencia de las energías [Morin, 2008]. Si, la diferencia, puesto la suma sería la energía total. Por cierto, la energía cinética asociada a un cuerpo de masa m que se mueve a una velocidad cuya magnitud es \dot{x} se tiene que $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, mientras la energía potencial elástica asociada al esquema de la figura 1 esta dada por $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, por lo que (13) se reescribe como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (14)$$

De acuerdo a la ecuación de Euler-Lagrange la ecuación (14) queda como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}. \quad (15)$$

donde tenemos que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = m\dot{x}$ y $\partial\mathcal{L}/\partial x = -kx$ por lo que (15) es:

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{16}$$

que es exactamente el resultado obtenido usando $F = ma$. Una ecuación tal como (16) que se deriva de una ecuación de Euler-Lagrange, se denomina una ecuación de movimiento.

Computación Cuántica

La Computación Cuántica es una rama de Ciencias de la Computación, la cual hace uso de los principios físicos y matemáticos que rigen la Teoría Cuántica. Por tanto, el paradigma cuántico en la programación difiere de la programación clásica, puesto usa estos conceptos inherentes matemáticos y físicos de dicha teoría, tal como la superposición de estado [Spector, 2007]. El tratamiento de elementos probabilísticos propios de la mecánica cuántica está presente en el manejo de algoritmos y programación. En general se refiere a término computación cuántica para describir procesos computacionales, cuya eficiencia depende de las propiedades de la teoría en el manejo de la información [Sabry, 2003].

Una computadora cuántica con una computadora común es como la energía nuclear comparada con el fuego [Johnson, 2002]. Esta diferencia proviene del mundo cuántico, que tiene características diferentes que el

mundo como lo conocemos normalmente. Este mundo cuántico va más allá y entra a un nivel subatómico, donde las predicciones divergen radicalmente de la llamada Física clásica.

En la computación clásica el elemento básico de información es el *bit*, el cual puede tomar dos valores o estados; cero o uno, prendido o apagado, verdadero o falso. Mientras en computación cuántica la unidad básica es el *qubit*, el cual puede estar en una superposición de valores 0 y 1, y al concatenar a los *qubits* se forman arreglos, llamados *quregistro*, que dotan a la computación cuántica de un paralelismo inherente que permite acelerar los procesos de información. A continuación, se mencionan algunos conceptos básicos relacionados a la Computación Cuántica:

El *qubit*, es la unidad mínima de información cuántica. Es un concepto que se define como una superposición de los valores cero y uno. En el momento en que un *qubit* se mide, será uno o cero. Sin embargo, antes de la medición el *qubit* puede tomar un valor mitad cero o mitad uno, o cualquier combinación de estos dos posibles valores. Christian y Baeyer (2005) presentan una explicación bastante ilustrativa de lo que es un *qubit*.

Como el *bit*, un *qubit* puede también estar en uno de los dos estados posibles, que en la Teoría Cuántica son etiquetados como $|0\rangle$ y $|1\rangle$. En esta teoría un objeto encerrado usando la notación $|\rangle$ puede ser llamado un *qubit*, un *estado*, un *vector*, o un *ket* [McMahon, 2007]. Un *qubit* puede existir en el estado $|0\rangle$ o en el estado $|1\rangle$, pero también puede existir en lo que se llama

superposición, siendo un estado que es una combinación lineal de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, si etiquetamos a este estado como $|\psi\rangle$, una superposición de estado es escrita como:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (17)$$

Aquí α y β son números complejos, números que son de la forma $z = x + iy$ donde $i = \sqrt{-1}$. Mientras un *qubit* pueda existir en superposición, cuando un *qubit* es medido, este solo estará en uno de los dos estados. La leyes de la Mecánica cuántica nos dicen que el módulo al cuadrado de α y β en (17) nos dan la probabilidad de encontrar al *qubit* en uno de los estados: $|\alpha|^2$: nos da la probabilidad de encontrar $|\psi\rangle$ en el estado $|0\rangle$ y $|\beta|^2$ nos dice la probabilidad de encontrar $|\psi\rangle$ en el estado $|1\rangle$. El hecho que las probabilidades deban sumar uno, es una condición que el cuadrado de los coeficientes de un *qubit* deben satisfacer:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (18)$$

El *Entrelazamiento* es el fenomeno de la Teoría Cuántica que ocurre cuando dos partículas permanecen relacionadas entre sí y forman un subsistema que no puede describirse en forma separada. Si una de las partículas sufre un cambio de estado, la otra se ve afectada automáticamente de maneta instantanea, sea cual fuere la distancia que la separe. Se dice que

dos partículas están entrelazadas si se da la superposición de sus posibles estados. Este concepto es el más importante dentro de la Teoría Cuántica, y es el que me motivo a ser una investigación dentro de la computación cuántica, pero su análisis requiere más detalle y por ende no se concentrará en ello, para una mayor explicación sobre este concepto se recomienda el libro de Bengtsson y Zyczkowski (2006).

Para la formalización de la idea sobre el Entrelazamiento es fundamental introducir el concepto de estado separable. Cuando un sistema consiste de dos subsistemas se dice que es un estado bipartita. Un ejemplo de ello es cuando Alicia y Beto cada quien tiene un miembro de un par enredado de partículas. El espacio de Hilbert¹ del sistema compuesto es el producto tensor del espacio de Hilbert que describe al sistema de Alicia y el espacio de Hilbert que describe al sistema de Beto. Se denota como H_A y H_B respectivamente, el espacio de Hilbert compuesto es;

$$H = H_A \otimes H_B. \quad (19)$$

Si se denota al estado base de Alicia como $|a_i\rangle$ y al estado base de Beto como $|b_j\rangle$ entonces al estado base del sistema compuesto encontrado por el producto tensor es;

$$|\alpha_{ij}\rangle = |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle = |a_i\rangle |b_j\rangle = |a_i b_j\rangle. \quad (20)$$

¹Se dice que H es un espacio de Hilbert si es un espacio vectorial con producto interno completo.

No todo estado $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ están entrelazados. Cuando dos sistemas están entrelazados el estado de cada sistema compuesto solo puede ser descrito con referencia al otro. Y si no están entrelazados, se dice que son un producto tensor o un sistema separable. Si $|\psi\rangle \in H_A$ y $|\phi\rangle \in H_B$ y $|\chi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, entonces $|\chi\rangle$ es separable y no está entrelazado. Un caso muy particular de estados entrelazados son los llamados estados de Bell.

El Entrelazamiento es una medida puramente cuántica, una medida que distingue entre estados separables y no separables, pero aún no se ha llegado a encontrar una medida universal [Bennett et al., 1996]. Se han propuesto medidas, tal como; la entropía de Von Neumann, entrelazamiento de formación, y la concurrencia.

La *entropía de Von Neumann* es la cantidad que nos permite medir el grado de entrelazamiento que presenta un sistema cuántico, caracterizada por una matriz densidad ρ que se define como:

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log_2 \rho). \quad (21)$$

La matriz densidad reducida de un subsistema se define como traza² (Tr) parcial sobre todas las variables que no pertenecen al subsistema.

$$\rho_{sub} = Tr_{\not sub}(\rho) \quad (22)$$

²Si un operador está en forma matricial, la traza del operador es la suma de su diagonal.

Como ejemplo tomemos un estado bipartita, el cual puede ser dividido en dos subsistemas A y B . Toda la información del estado de cada subsistema está en las matrices densidad reducida de cada subsistema;

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) ; \rho_B = Tr_A(\rho_{AB}). \quad (23)$$

La entropía de un subsistema se define análogamente a la entropía del sistema compuesto pero con la matriz reducida en vez de la matriz densidad entera.

$$S(\rho_A) = -Tr(\rho_A \log_2 \rho_A) ; S(\rho_B) = -Tr(\rho_B \log_2 \rho_B). \quad (24)$$

Se define una medida de entrelazamiento $E(\rho_{AB})$ entre dos subsistemas A y B , que forman un estado, como la entropía de cualquiera de los subsistemas.

$$E(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B). \quad (25)$$

Para un estado bipartita, el *entrelazamiento de formación* $E(\rho_{AB})$ es la entropía de Von Neumann de uno de los dos subsistemas. Para la separación de un sistema bipartita $\mathcal{E} = \{ p_i, \rho_{AB}^i \}$ en entrelazamiento de formación $E(\mathcal{E})$ se define como el promedio de los entrelazamientos de formación de cada estado ρ_{AB}^i con la probabilidad p_i del estado;

$$E(\mathcal{E}) = \sum_i p_i E(\rho_{AB}^i) \quad (26)$$

La *conurrencia* es una medida de entrelazamiento derivada del entrelazamiento de formación de un par de subsistemas. En los trabajos de Hill y Wootters (1997) demuestran que la entropía de formación para un estado bipartita de 2 *qubits* es una función de la concurrencia y por ende la proponen usarla como medida de entrelazamiento;

$$E(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad (27)$$

donde

$$h(x) = -x \log x - (1 - x) \log(1 - x), \quad (28)$$

$$C = C(S) = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}), \quad (29)$$

λ_i son los autovalores en orden decreciente de la matriz,

$$S = \rho_r(\sigma_y \otimes \sigma_y \rho_r^* \sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (30)$$

ρ_r es la matriz densidad reducida del sistema considerado y σ_y es la matriz de Pauli.

Referencias bibliográficas

- [Alonso, 2009] Alonso, M. (2009). *Mecánica Cuántica: Fundamentos y Aplicaciones*. Universidad de Salamanca, España.
- [Arvind, 2001] Arvind (2001). Quantum entanglement and quantum computational. *Pramana*, 56(2):357–365.
- [Bengtsson y Życzkowski, 2006] Bengtsson, I. y Życzkowski, K. (2006). *Geometry of Quantum States: An Introduction of Quantum Entanglement*. Harvard University Press.
- [Bennett et al., 1996] Bennett, C. H., DiVincenzo, D. P., Smolin, J. A., y Wootters, W. K. (1996). Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physics Review*, pages 3824–3854.
- [Bub, 2015] Bub, J. (2015). Quantum entanglement and information. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <http://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/qt-entangle/>, summer 2015 edition.

- [Christian y Baeyer, 2005] Christian, H. y Baeyer, V. (2005). *Information: the new language of science*. Harvard University Press.
- [Grover, 1996] Grover, K. (1996). A fast quantum mechanical algorithm for database search. *28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pages 212–219.
- [Hill y Wootters, 1997] Hill, S. y Wootters, W. (1997). Entanglement of a pair of quantum bits. *Physics Review Lett.*, 78(26):5022–5025.
- [Johnson, 2002] Johnson, G. (2002). *A Shortcut Through Time: The Path to the Quantum Computer*. Borzoi Book, Nueva York.
- [Jozsa y Linden, 2003] Jozsa, R. y Linden, N. (2003). On the role of entanglement in quantum computational speed-up. *The Royal Society*, 459(2036).
- [Marion, 1996] Marion, J. B. (1996). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Reverté, Barcelona.
- [McMahon, 2007] McMahon, D. (2007). *Quantum Computing Explained*. Wiley-IEEE Computer Society Press.
- [Morin, 2008] Morin, D. (2008). *Introduction to Classical Mechanics*. Cambridge University Press.
- [Patel, 2006] Patel, A. (2006). Optimal database search: Waves and catalysis. *International Journal of Quantum Information*, (4):815–825.

- [Rashid, 2006] Rashid, M. A. (2006). Transition amplitude for time-dependent linear harmonic oscillator with linear time-dependent terms added to the hamiltonian. *Journal Physics A: Math*, (34).
- [Sabry, 2003] Sabry, A. (2003). Modeling quantum computing in haskell. *Haskell '03 Proceeding of the 2003 ACM SIGPLAN workshop on Haskell*, pages 39–49.
- [Schrödinger, 1935] Schrödinger, E. (1935). Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31(4):555–563.
- [Shor, 1994] Shor, P. (1994). Algorithms for quantum comutation: Discrete logarithm and factoring. *35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 124–134.
- [Spector, 2007] Spector, L. (2007). Quantum computing. *GECCO '07 Proceeding of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, pages 3645–3674.